

# Zur Berechnung der laminaren Reibungsschicht bei Überschallgeschwindigkeit

Schlichting, Hermann

Veröffentlicht in:  
Abhandlungen der Braunschweigischen  
Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 3, 1951,  
S. 239-264



Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig

# Zur Berechnung der laminaren Reibungsschicht bei Überschallgeschwindigkeit

Von **H. Schlichting**

Mit 13 Abbildungen

*Summary: Recently L. Howarth<sup>1)</sup> has given a method to calculate the boundary layer for the velocity distribution and temperature near an insulated wall for compressible laminar flow, the Prandtl number being 1. It is shown here, that approximate solutions of this problem can be obtained in a very simple way by applying the momentum method in the version given by H. Holstein and T. Bohlen<sup>2)</sup> for incompressible flow.*

## I. Einleitung

In einer sehr verdienstvollen Arbeit hat L. Howarth<sup>1)</sup> kürzlich gezeigt, daß sich unter gewissen besonderen Bedingungen die Integration der laminaren Reibungsschicht in kompressibler Strömung sehr erheblich vereinfachen läßt. Es ist bereits mehrfach darauf hingewiesen worden, daß die Untersuchung der kompressiblen Grenzschichten vor allem dadurch so außerordentlich umfangreich wird, daß mit Berücksichtigung der Kompressibilität die Anzahl der Parameter stark anwächst. Beim Übergang von der inkompressiblen zur kompressiblen laminaren Grenzschicht treten zum mindesten die folgenden vier neuen Parameter auf:

1. die Machsche Zahl;
2. die Prandtlsche Zahl;
3. das empirische Gesetz über die Temperaturabhängigkeit des Zähigkeitsbeiwertes  $\mu(T)$ , das meist angesetzt wird in der Form  $\mu/\mu_\infty = (T/T_\infty)^\omega$  mit  $1/2 < \omega < 1$ ;
4. die Randbedingung für die Temperaturverteilung: ob Wärmeübergang zwischen dem umströmten Körper und der Flüssigkeit vorhanden ist, oder ob die Wand als wärmeundurchlässig anzusehen ist (Thermometerproblem).

Die oben erwähnten besonderen Bedingungen, unter denen nach Howarth eine erhebliche Vereinfachung des Integrationsproblems eintritt, sind folgende:

1. Das Zähigkeitsgesetz ist von der Form, daß der Zähigkeitsbeiwert der absoluten Temperatur proportional ist

$$\mu/\mu_\infty = T/T_\infty. \quad (1)$$

Es ist also  $\omega = 1$ .

2. Die Prandtlsche Kennzahl ist gleich eins:

$$Pr = 1. \quad (2)$$

3. Es liegt das Thermometerproblem vor, also kein Wärmeübergang zwischen Körper und Flüssigkeit

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} = 0, \quad (3)$$

wenn  $y$  die Koordinate senkrecht zur Wand bedeutet.

Die Machsche Zahl darf dabei beliebige Werte haben (Unter- und Überschallgeschwindigkeit). Auch die Form des umströmten zylindrischen Körpers kann beliebig sein. Da für Luft  $Pr = 0,7$  und  $\omega \approx 0,8$  ist, sind diese Voraussetzungen hier einigermaßen erfüllt, so daß dem von Howarth untersuchten Fall einige praktische Bedeutung zukommt.

Die von Howarth erreichte Vereinfachung besteht darin, daß unter den angegebenen Voraussetzungen die Grenzschichtgleichungen durch Transformation der  $y$ -Koordinate (senkrecht zur Wand) auf eine solche Form gebracht werden können, daß sie sich von den Gleichungen für die inkompressible Strömungsgrenzschicht nur noch unwesentlich unterscheiden. Auf die transformierten Grenzschichtdifferentialgleichungen hat dann Howarth das mit dem Impulssatz arbeitende Kármán-Pohlhausensche Näherungsverfahren<sup>3)</sup> angewendet, wodurch die Integration für beliebige Machzahlen und Körperkonturen möglich wird. In einer neueren Arbeit von K. Stewartson<sup>2)</sup> wurde dieses Rechenverfahren noch weiter ausgeführt.

In beiden Arbeiten wurde das Kármán-Pohlhausensche Näherungsverfahren in der ursprünglichen Form von 1921 verwendet, das in der Durchführung ziemlich schwerfällig ist und den schwerwiegenden Nachteil hat, daß man dabei von der potentialtheoretischen Geschwindigkeitsverteilung  $U(x)$  die zweite Ableitung nach der Lauflänge  $d^2 U/dx^2$  benötigt, die meist nur durch zweimalige graphische Differentiation beschafft werden kann und deshalb mit erheblicher Unsicherheit behaftet ist. Wir wollen nachstehend zeigen, daß die Durchführung der Rechnung sich wesentlich bequemer gestalten läßt, wenn man die von H. Holstein und T. Bohlen<sup>4)</sup> vorgeschlagene Verbesserung des Kármán-Pohlhausen-Verfahrens auf den vorliegenden Fall der kompressiblen Grenzschicht überträgt.

Es sei hier angemerkt, daß der analoge Fall der kompressiblen Grenzschicht mit Wärmeübergang bei beliebiger Körperkontur auf Grund des Kármán-Pohlhausen-Näherungsverfahrens von J. Ginzel<sup>5)</sup> behandelt wurde, wobei die Holsteinsche Vereinfachung bereits berücksichtigt wurde. Die kompressible Plattengrenzschicht ohne Wärmeübergang wurde nach einem Näherungsverfahren schon früher von Th. v. Kármán und H. S. Tsien<sup>6)</sup> berechnet, während exakte Lösungen für die längsangeströmte Platte mit und ohne Wärmeübergang von W. Hantzsche und H. Wendt<sup>7)</sup> angegeben wurden.

## II. Die Grundgleichungen

Die Bewegungsgleichungen und die Gleichung für die Temperaturverteilung (Energiegleichung) für unser Problem der ebenen Strömung um einen Zylinder lauten mit den üblichen Grenzschichtvereinfachungen unter Berücksichtigung von Kompressions- und Reibungswärme

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0 \quad (\text{Kontinuität}), \quad (4)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (x\text{-Impuls}), \quad (5)$$

$$\varrho g c_p \left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = u \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad (\text{Energie-Gleichung}). \quad (6)$$

Dabei bedeuten  $x, y$  und  $u, v$  die Koordinaten bzw. Geschwindigkeitskomponenten parallel bzw. senkrecht zur Wand,  $p$  den Druck,  $T$  die absolute Temperatur,  $\varrho$  die Dichte,  $\mu$  den Zähigkeitsbeiwert,  $c_p$  die spezifische Wärme bei konstantem Druck bezogen auf die Gewichtseinheit,  $\lambda$  die Wärmeleitfähigkeit und  $g$  die Erdschwere.

Die Randbedingungen sind

$$\left. \begin{aligned} u = v = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad \text{für} \quad y = 0 \\ u = U(x), \quad T = T_1 \quad \text{für} \quad y = \infty. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

In dem hier vorausgesetzten Fall, daß die Prandtl-Zahl

$$Pr = \frac{\mu g c_p}{\lambda} = 1$$

ist, existiert, wie sich leicht zeigen läßt, ein Integral der Energiegleichung (6) in der Form

$$\frac{1}{2} u^2 + g c_p T = \text{const.} \quad (8)$$

Aus dieser wichtigen Beziehung zwischen der Temperatur- und Geschwindigkeitsverteilung kann die Temperaturverteilung in einfacher Weise ermittelt werden, nachdem die Geschwindigkeitsverteilung berechnet worden ist. Differenziert man Gleichung (8) nach  $y$ , so erkennt man, daß wegen Gleichung (7) die Thermometerproblembedingung  $(\partial T / \partial y) = 0$  bei  $y = 0$  für alle Lösungen unseres Problems erfüllt ist. Unter Einführung der Werte am äußeren Rande der Grenzschicht läßt sich Gleichung (8) auch schreiben in der Form:

$$\frac{T}{T_1} = 1 + \frac{1}{2 g c_p T_1} (U^2 - u^2), \quad (9)$$

auf die wir später zurückkommen werden. Hiermit ist die Energiegleichung (6) ausgeschöpft, so daß wir diese weiterhin nicht mehr zu beachten brauchen.

Aus Gleichung (9) folgt für die Temperatur der Wand ( $u = 0$ ) infolge Aufheizung durch die Reibungswärme in bekannter Weise

$$T_w = T_1 + \frac{U^2}{2 g c_p}. \quad (9a)$$

### III. Einige Beziehungen aus der Thermodynamik und Gasdynamik

Aus der allgemeinen Zustandsgleichung des idealen Gases

$$\frac{p}{\varrho} = g R T \quad (10)$$

zusammen mit der Laplaceschen Formel für die Schallgeschwindigkeit  $c$

$$\gamma \frac{p}{\varrho} = c^2 \quad (11)$$

und der bekannten Beziehung

$$c_p - c_v = R \quad (12)$$

folgt für die Schallgeschwindigkeit mit  $c_p/c_v = \gamma$ :

$$c^2 = g c_p (\gamma - 1) T. \quad (13)$$

Die Bernoullische Gleichung der kompressiblen Strömung bei adiabatischer Zustandsänderung läßt sich, da der Druck über die Grenzschichtbreite konstant ist,  $p = p_1$ , schreiben in der Form:

$$\frac{U^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\varrho_1} = \frac{U_\infty^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_\infty}{\varrho_\infty} = \text{const.} \quad (14)$$

Wir führen drei verschiedene Schallgeschwindigkeiten ein:

$$\left. \begin{array}{l} \text{im Unendlichen (Normzustand):} \quad c_\infty^2 = \gamma \frac{p_\infty}{\varrho_\infty} \\ \text{am äußeren Rand der Grenzschicht:} \quad c_1^2 = \gamma \frac{p_1}{\varrho_1} = \gamma \frac{p}{\varrho_1} \\ \text{für den „Kesselzustand“ (Ruhe):} \quad c_0^2 = \gamma \frac{p_0}{\varrho_0} \end{array} \right\} \quad (15)$$

und bilden damit die folgenden Mach-Zahlen

$$M_\infty = \frac{U_\infty}{c_\infty}; \quad M_1 = \frac{U}{c_1}; \quad M_0 = \frac{U}{c_0}. \quad (16)$$

Zwischen  $c_1^2$  und  $c_0^2$  besteht nach Gleichung (14) der Zusammenhang:

$$c_1^2 + \frac{\gamma-1}{2} U^2 = c_0^2. \quad (17)$$

Dies läßt sich wegen Gleichung (16) auch schreiben in der Form:

$$M_1^2 = \frac{U^2}{c_0^2 - \frac{\gamma-1}{2} U^2} = \frac{M_0^2}{1 - \frac{\gamma-1}{2} M_0^2}. \quad (18)$$

Weiter ermitteln wir aus (14) für den späteren Gebrauch den Zusammenhang zwischen der Druckverteilung und der Geschwindigkeitsverteilung. Aus Gleichung (14) folgt:

$$\frac{1}{2} (U^2 - U_\infty^2) = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_\infty}{\varrho_\infty} \left( 1 - \frac{p}{p_\infty} \frac{\varrho_\infty}{\varrho_1} \right)$$

und mit

$$\frac{\varrho_\infty}{\varrho_1} = \left( \frac{p_\infty}{p} \right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

nach der adiabatischen Zustandsgleichung

$$\frac{\gamma-1}{2} (U^2 - U_\infty^2) = c_\infty^2 \left[ 1 - \left( \frac{p}{p_\infty} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right].$$

Unter Einführung der Machschen Zahl nach (16) erhält man:

$$\frac{p}{p_\infty} = \left[ 1 - \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2 \left( \frac{U^2}{U_\infty^2} - 1 \right) \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}. \quad (19)$$

Ferner benötigen wir noch den Zusammenhang zwischen den beiden Machschen Zahlen  $M_1$  und  $M_\infty$ . Aus (16) und (14) folgt

$$\frac{M_1}{M_\infty} = \frac{U}{U_\infty} \cdot \frac{c_\infty}{c_1} = \frac{U}{U_\infty} \left( \frac{p_\infty}{p} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{\varrho_1}{\varrho_\infty} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Mit  $\frac{\varrho_1}{\varrho_\infty} = \left( \frac{p}{p_\infty} \right)^{\frac{1}{\gamma}}$  kommt  $\frac{M_1}{M_\infty} = \frac{U}{U_\infty} \left( \frac{p}{p_\infty} \right)^{\frac{1-\gamma}{2\gamma}}$ , und wenn man nach (19) einsetzt:

$$\frac{M_1}{M_\infty} = \frac{U}{U_\infty} \left\{ 1 - \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2 \left( \frac{U^2}{U_\infty^2} - 1 \right) \right\}^{-\frac{1}{2}}. \quad (20)$$

Die Gleichung (9) für die Temperaturverteilung läßt sich unter Einführung von  $M_1$  nach (16) schreiben:

$$\frac{T}{T_1} = 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2 \left( 1 - \frac{u^2}{U_1^2} \right). \quad (21)$$

#### IV. Die Howarthsche Transformation

Um nun die Gleichungen (4) und (5) zu integrieren, wird zunächst eine Stromfunktion  $\psi(x, y)$  eingeführt durch

$$\varrho u = \varrho_\infty \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad \varrho v = -\varrho_\infty \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (22)$$

wodurch die Kontinuitätsgleichung (4) integriert ist. Für die Integration der Bewegungsgleichung (5) führt nun Howarth eine neue  $y$ -Koordinate ein durch

$$Y = \int_0^y \left( \frac{v_\infty}{v} \right)^{\frac{1}{2}} dy. \quad (23)$$

Wegen  $\frac{v_\infty}{v} = \frac{\mu_\infty \varrho}{\mu \varrho_\infty}$  erhält man unter Beachtung von (1) und mit  $\frac{\varrho}{\varrho_\infty} = \frac{p}{p_\infty} \frac{T_\infty}{T}$  nach (10):

$$\frac{v_\infty}{v} = \left( \frac{T_\infty}{T} \right)^2 \frac{p}{p_\infty},$$

so daß man Gleichung (23) in der Form schreiben kann:

$$Y = \left( \frac{p}{p_\infty} \right)^{\frac{1}{2}} \int_0^y \frac{T_\infty}{T} dy. \quad (24)$$

Die Transformation (23) ist so gewählt, daß sie für inkompressible Strömung in die Identität übergeht. Führt man weiter in den Variablen  $x$  und  $Y$  eine neue Stromfunktion ein durch

$$\psi(x, y) = \left( \frac{p}{p_\infty} \right)^{\frac{1}{2}} \chi(x, Y), \quad (25)$$

so ergibt sich

$$u = \frac{\partial \chi}{\partial Y}.$$

Die Einführung von  $\chi$  in die Bewegungsgleichung (5) ergibt nach längerer Rechnung, die bei Howarth angegeben ist, für  $\chi$  die Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial Y} \frac{\partial \chi}{\partial Y} - \frac{\partial^2 \chi}{\partial Y^2} \frac{\partial \chi}{\partial x} = U \frac{dU}{dx} \left[ \frac{T}{T_1} - \frac{\gamma}{2c_1^2} \chi \frac{\partial^2 \chi}{\partial Y^2} \right] + v_\infty \frac{\partial^3 \chi}{\partial Y^3}. \quad (26)$$

Für  $\chi(x, Y)$  folgen aus (7) die Randbedingungen

$$\chi = \frac{\partial \chi}{\partial Y} = 0 \quad \text{für } y = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \chi}{\partial Y} = U \quad \text{für } Y \rightarrow \infty.$$

Die Gleichung (26) unterscheidet sich von der entsprechenden inkompressiblen Gleichung lediglich durch die eckige Klammer, welche im inkompressiblen Fall gleich eins ist. Der Kompressibilitätseinfluß ist also nach Einführung der transformierten Stromfunktion  $\chi(x, Y)$  durch Gleichung (25) gleichsam lediglich in der eckigen Klammer [ ] von Gleichung (26) enthalten, welche sich mit Rücksicht auf (21) auch in der Form schreiben läßt:

$$G = \frac{T}{T_1} - \frac{\gamma}{2c_1^2} \chi \frac{\partial^2 \chi}{\partial Y^2} = 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2 \left( 1 - \frac{u^2}{U^2} \right) - \frac{\gamma}{2c_1^2} \chi \frac{\partial^2 \chi}{\partial Y^2}. \quad (27)$$

Nachdem die Gleichung für  $\chi(x, Y)$  gelöst ist, hat man noch wieder von  $Y$  auf  $y$  umzurechnen, was in folgender Weise gelingt. Aus (24) folgt:

$$\frac{dy}{dY} = \left( \frac{p_\infty}{p} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{T_1}{T_\infty} \frac{T}{T_1}, \quad (28)$$

und hieraus mit  $\frac{T_1}{T_\infty} = \left( \frac{p_\infty}{p} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$  nach der Zustandsgleichung und mit  $\frac{T}{T_1}$  nach Gleichung (21):

$$y = \left( \frac{p_\infty}{p} \right)^{\frac{2-\gamma}{2\gamma}} \left\{ \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2 \right) Y - \frac{\gamma-1}{2} M_1^2 \int_0^Y \left( \frac{u}{U} \right)^2 dY \right\}. \quad (29)$$

## V. Das Näherungsverfahren mit Hilfe des Impulssatzes

Ganz analog wie im inkompressiblen Fall kann man jetzt auch für die kompressible Strömung aus Gleichung (26) ein Kármán-Pohlhausensches Näherungsverfahren herleiten, indem man Gleichung (26) zunächst über  $Y$  von  $Y = 0$  bis  $Y = \Delta$  integriert, wo  $\Delta(x)$  einen Wandabstand bedeutet, der überall größer ist als die Grenzschichtdicke. Analog zu den bei inkompressibler Strömung gebräuchlichen Größen

$$\left. \begin{array}{ll} \text{Verdrängungsdicke} & \delta^* = \int_0^\delta \left( 1 - \frac{u}{U} \right) dy \\ \text{Impulsverlustdicke} & \vartheta = \int_0^\delta \frac{u}{U} \left( 1 - \frac{u}{U} \right) dy \end{array} \right\} \quad \text{inkompressibel}$$

werden für die kompressible Strömung eingeführt:

$$\left. \begin{array}{ll} \text{Verdrängungsdicke} & \Delta^* = \int_0^{\Delta} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dY \\ \text{Impulsverlustdicke} & \Theta = \int_0^{\Delta} \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dY \end{array} \right\} \text{kompressibel} \quad (30)$$

(31)

Die gliedweise Integration von Gleichung (26) führt dann, wie im einzelnen bei Howarth angegeben ist, auf die folgende Impulsverlustgleichung:

$$U^2 \frac{d\Theta}{dx} + U \frac{dU}{dx} \left[ \Theta \left(2 - \frac{U^2}{2c_1^2}\right) + \Delta^* \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} \frac{U^2}{c_1^2}\right) \right] = v_\infty \left( \frac{\partial u}{\partial Y} \right)_0. \quad (32)$$

Die entsprechende inkompressible Gleichung lautet:

$$U^2 \frac{d\vartheta}{dx} + U \frac{dU}{dx} (2\vartheta + \delta^*) = \nu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_0. \quad (32a)$$

In dimensionsloser Form läßt sich Gleichung (32) unter Einführung der Machschen Zahl  $M_1$  nach Gleichung (16) auch schreiben:

$$\frac{U\Theta}{\nu_\infty} \frac{d\Theta}{dx} + \frac{\Theta^2}{\nu_\infty} \frac{dU}{dx} \left[ \left(2 - \frac{1}{2} M_1^2\right) + \frac{\Delta^*}{\Theta} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2\right) \right] = \frac{\Theta}{U} \left( \frac{\partial u}{\partial Y} \right)_0. \quad (33)$$

Im inkompressiblen Fall und auch im kompressiblen Fall bei Howarth wird diese Gleichung weiter dadurch ausgewertet, daß für die Geschwindigkeitsverteilung  $u/U$  nach K. Pohlhausen<sup>3)</sup> ein Polynom 4. Grades in  $y/\delta$  bzw.  $Y/\Delta$  eingeführt wird. Weiter werden im inkompressiblen Fall die beiden Formparameter

$$\lambda_i = \frac{\delta^2}{\nu} \frac{dU}{dx}; \quad \kappa_i = \frac{\vartheta^2}{\nu} \frac{dU}{dx} \quad (34)$$

eingeführt, während wir für den kompressiblen Fall setzen:

$$\lambda = \frac{\Delta^2}{\nu_\infty} \frac{dU}{dx} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2\right); \quad \kappa = \frac{\Theta^2}{\nu_\infty} \frac{dU}{dx} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2\right). \quad (35)$$

Zwischen  $\kappa$  und  $\lambda$  besteht somit die Beziehung

$$\kappa = \left( \frac{\Theta}{\Delta} \right)^2 \cdot \lambda. \quad (36)$$

Die ursprüngliche, von K. Pohlhausen angegebene Form des Näherungsverfahrens arbeitet nur mit dem Parameter  $\lambda_i$ , dagegen nicht mit  $\kappa_i$ ; auch das Howarth'sche Verfahren arbeitet nur mit dem entsprechenden Parameter  $\lambda$ , und nicht mit  $\kappa$ . In beiden Fällen wird dann durch Auswertung von Gleichung (32a) bzw. (33) eine Differentialgleichung für  $\delta$  bzw.  $\Delta$  erhalten, welche von der Potentialströmung die zweite Ableitung  $d^2U/dx^2$  enthält (Howarth, Gleichung (46)). Dies macht, wie schon oben angegeben, die Durchführung der Rechnungen ziemlich schwerfällig. Wie Holstein<sup>4)</sup> für



den inkompressiblen Fall gezeigt hat, kann die Rechnung wesentlich bequemer gestaltet werden, wenn man neben dem ersten Formparameter  $\lambda_i$  noch den zweiten Formparameter  $\kappa_i$  einführt. Daß diese wesentliche Vereinfachung sich ganz analog auch im kompressiblen Fall erreichen läßt, soll von uns im folgenden gezeigt werden.

Dabei hatten wir ursprünglich versucht, den von K. Pohlhausen und L. Howarth verwendeten Ansatz mit einem Polynom 4. Grades für die Geschwindigkeitsverteilung beizubehalten. Bei der Ausführung von Beispielrechnungen ergab sich jedoch, daß dieser Polynomansatz schon bei mäßig großem Druckabfall versagt ( $\lambda > 12$ ,  $\kappa > 0,094$ ). Wir haben es deshalb vorgezogen, für die Geschwindigkeitsverteilung einen anderen Ansatz zu wählen, bei dem dieses Versagen nicht eintritt. Der von uns gewählte Ansatz für die Geschwindigkeitsverteilung ist ein Spezialfall des von uns früher angegebenen Näherungsverfahrens für die Grenzschicht mit Absaugung<sup>8)</sup>. Mit

$$\eta = \frac{Y}{A} \quad (37)$$

setzen wir für die Geschwindigkeitsverteilung:

$$\frac{u}{U} = F_1(\eta) + K F_2(\eta) \quad (38)$$

mit

$$\left. \begin{aligned} F_1(\eta) &= 1 - e^{-3\eta} && \text{für } 0 \leq \eta \leq \infty \\ F_2(\eta) &= F_1 - \sin\left(\frac{\pi}{2}\eta\right) && \text{für } 0 \leq \eta \leq 1 \\ F_2(\eta) &= F_1 - 1 = -e^{-3\eta} && \text{für } \eta \geq 1. \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

Die Funktionen  $F_1(\eta)$  und  $F_2(\eta)$  sind in Abb.1 dargestellt. Dabei besteht zwischen  $K$  und  $\lambda$  die Beziehung\*)

$$K = \frac{1}{9}\lambda - 1. \quad (40)$$

Die in Gleichung (34) auftretenden Größen  $\Delta^*$ ,  $\Theta$ ,  $\left(\frac{\partial u}{\partial Y}\right)_0$  lassen sich jetzt mit dem Ansatz (38) auswerten und ergeben:

$$\frac{\Theta}{A} = \frac{1}{3} \left\{ \frac{1}{2} + 0,06656 K - 0,02358 K^2 \right\} \quad (41)$$

$$\frac{\Delta^*}{A} = \frac{1}{3} \left\{ 1 - 0,09014 K \right\} \quad (42)$$

$$\frac{\Delta}{U} \left( \frac{\partial u}{\partial Y} \right)_0 = 3 \left\{ 1 + 0,4764 K \right\}. \quad (43)$$

\*) Es muß sein:

$$-\lambda = \frac{\Delta^2}{U} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} \right)_0.$$

Da  $\left( \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} \right)_0 = \left( \frac{\partial^3 \chi}{\partial Y^3} \right)_0 = -\frac{U}{\nu_\infty} \frac{dU}{dx} \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2 \right)$  nach (26) und (27) ist, folgt  $\lambda = -\frac{\Delta^2}{U} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} \right)_0 = \frac{\Delta^2}{\nu_\infty} \frac{dU}{dx} \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2 \right)$  in Übereinstimmung mit (35).

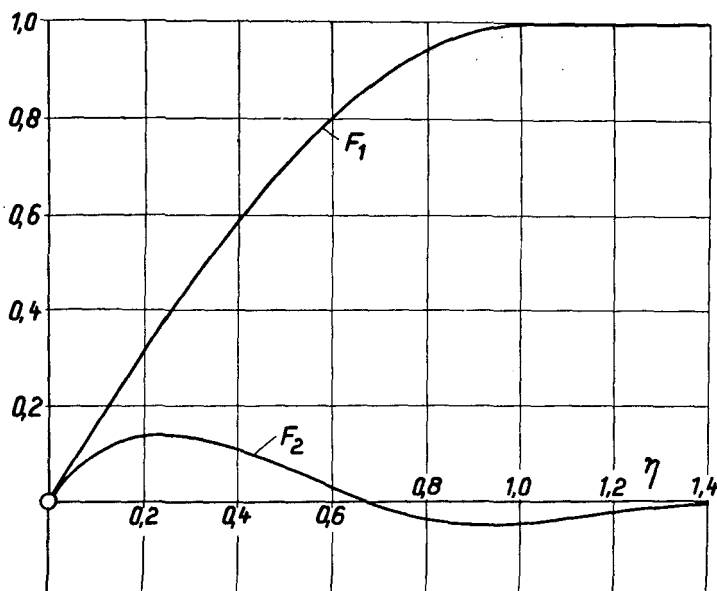


Abb. 1. Die Funktionen  $F_1(\eta)$  und  $F_2(\eta)$  für die Geschwindigkeitsverteilung nach Gl. (38) und (39)

Wegen Gleichung (40) sind damit diese Größen auch als Funktionen von  $\lambda$  ausgedrückt. Die Beziehung (36) zwischen  $\kappa$  und  $\lambda$  läßt sich damit schreiben in der Form

$$\kappa = \frac{\lambda}{9} \left[ \frac{1}{2} + 0,06656 \left( \frac{\lambda}{9} - 1 \right) - 0,02358 \left( \frac{\lambda}{9} - 1 \right)^2 \right]^2, \quad (44)$$

womit eine universelle Beziehung zwischen dem ersten Formparameter  $\lambda$  und dem zweiten Formparameter  $\kappa$  hergestellt ist. Über die Gleichungen (40) und (44) zusammen sind die Parameter  $\frac{\Delta}{\Theta}$ ,  $\frac{\Delta^*}{\Delta}$  und  $\frac{\Delta}{U} \left( \frac{\partial u}{\partial Y} \right)_0$  nach (41), (42) und (43) auch als Funktion von  $\kappa$  bekannt. Man kann deshalb auch die beiden in Gleichung (33) auftretenden Parameter  $\frac{\Delta^*}{\Theta}$  und  $\frac{\Theta}{U} \left( \frac{\partial u}{\partial Y} \right)_0$  als Funktionen von  $\kappa$  ansehen. Man hat somit:

$$\frac{\Delta^*}{\Theta} = f_1(\kappa) = \frac{1 - 0,09014 K}{\frac{1}{2} + 0,06656 K - 0,02358 K^2} \quad (45)$$

$$\frac{\Theta}{U} \left( \frac{\partial u}{\partial Y} \right)_0 = f_2(\kappa) = (1 + 0,4764 K) \left( \frac{1}{2} + 0,06656 K - 0,02358 K^2 \right). \quad (46)$$

Da  $\kappa$  nach (35) außer von bekannten Größen nur von  $\Theta$  abhängt, ist hiermit erreicht, daß Gleichung (33) nur noch  $\Theta$  enthält, und somit als Gleichung für  $\Theta(x)$  integriert werden kann.

Um jetzt Gleichung (33) in eine für die Integration bequeme Form zu bringen, führen wir noch die Abkürzung ein:

$$Z = \frac{\Theta^2}{\nu_\infty}. \quad (47)$$

Dann ist nach (35)

$$\kappa = Z \frac{dU}{dx} \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2 \right). \quad (48)$$

Mit den Abkürzungen (45) und (46) und mit (47) und (48) erhält Gleichung (33) die Form:

$$\frac{1}{2} U \frac{dZ}{dx} + \frac{\kappa}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2} \left\{ 2 + f_1(\kappa) + \frac{M_1^2}{2} [(\gamma-1) f_1(\kappa) - 1] \right\} = f_2(\kappa).$$

Führt man schließlich noch die Abkürzung ein:

$$F(\kappa, M_1) = 2f_2(\kappa) - \frac{2\kappa}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2} \left\{ 2 + f_1(\kappa) + \frac{M_1^2}{2} [(\gamma-1) f_1(\kappa) - 1] \right\}, \quad (49)$$

so erhält man die Differentialgleichung für  $Z(x)$  in der abgekürzten Form:

$$\boxed{\frac{dZ}{dx} = \frac{F(\kappa, M_1)}{U}}. \quad (50)$$

Für  $M_1 = 0$  reduziert sich die Funktion  $F_1(\kappa, M_1)$  auf den inkompressiblen Wert

$$F(\kappa, 0) = F(\kappa) = 2f_2(\kappa) - 4\kappa - 2\kappa f_1(\kappa). \quad (51)$$

Der Wert von  $\kappa$  im Staupunkt ( $\dot{U} = 0$ ) ist in bekannter Weise gegeben durch  $F = 0$ . Da im Staupunkt immer  $M_1 = 0$  ist, ist der  $\kappa$ -Wert im Staupunkt bei kompressibler Strömung unabhängig von der Machzahl  $M_\infty$  und gleich dem inkompressiblen Wert, der durch die Nullstelle von Gleichung (51) gegeben ist. Auch der Wert im Ablösungspunkt kann von der inkompressiblen Strömung übernommen werden. Damit hat man

	$\kappa$	$K$
Staupunkt	0,0709	-0,6453
Geschwindigkeitsmaximum	0	-1
Ablösungspunkt	-0,0682	-1,6316

Die Funktion  $F(\kappa, M_1)$ ; die universell (unabhängig vom speziellen Problem) berechnet werden kann, ist in Tabelle 1 und Abb. 2 angegeben.

## VI. Beispiele\*)

### a) Die längsangeströmte ebene Platte

Wir erproben unser Näherungsverfahren zunächst an dem Fall der längsangeströmten ebenen Platte, für den ein Vergleich mit der exakten Lösung möglich ist. Mit  $U = U_\infty$  ist  $\lambda = \kappa = 0$  und  $K = -1$ . Damit wird nach den Gleichungen (38) und (39) die Geschwindigkeitsverteilung für  $0 \leq \eta \leq 1$ :

$$\frac{u}{U_\infty} = \sin\left(\frac{\pi}{2} \eta\right). \quad (52)$$

In der Auftragung  $u/U_\infty$  über  $\eta = Y/\Delta$  sind also die Geschwindigkeitsprofile für die verschiedenen Machzahlen identisch. In der Auftragung über dem

\*) Die nachstehenden Beispielrechnungen verdanke ich Herrn W. Dienemann.

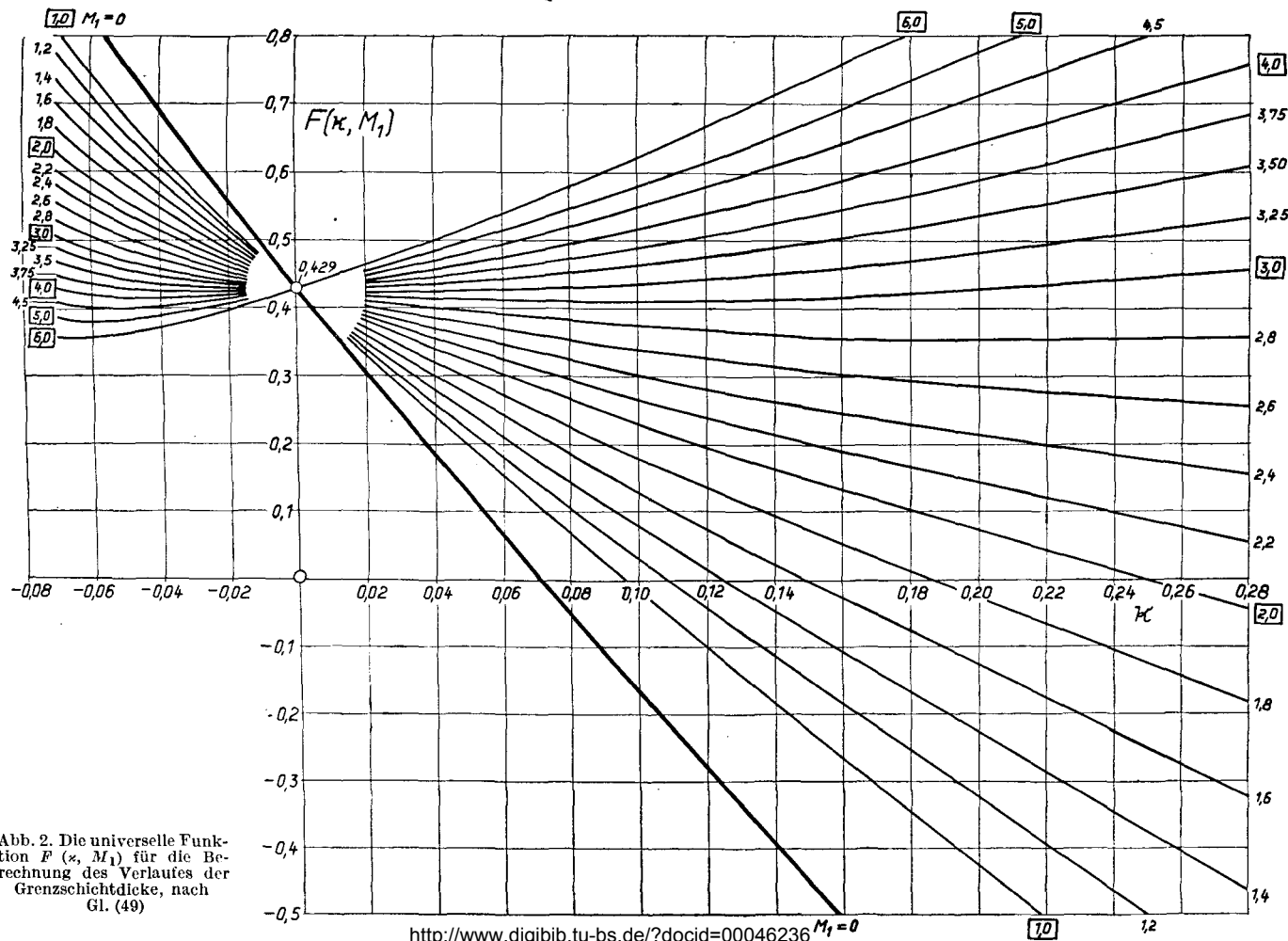


Abb. 2. Die universelle Funktion  $F(\kappa, M_1)$  für die Berechnung des Verlaufes der Grenzschichtdicke, nach Gl. (49)

tatsächlichen Wandabstand  $y$  trifft dies jedoch nicht zu, vgl. unten. Für die Berechnung der Grenzschichtdicke erhält man aus Gleichung (50) mit  $F(0, M_1) = 0,429$ :

$$\frac{dZ}{dx} = \frac{0,429}{U_\infty},$$

und damit  $Z = 0,429 x/U_\infty$  und

$$\Theta = 0,655 \sqrt{\frac{x v_\infty}{U_\infty}}. \quad (53a)$$

Mit  $\Delta/\Theta = 7,34$  und  $\Delta^*/\Theta = 2,66$  aus Gleichung (41) und (42) ergibt sich:

$$\Delta = 4,81 \sqrt{\frac{x v_\infty}{U_\infty}}; \quad \Delta^* = 1,74 \sqrt{\frac{x v_\infty}{U_\infty}}. \quad (53)$$

Die Umrechnung der Geschwindigkeitsprofile auf den tatsächlichen Wandabstand  $y$  erfordert den Zusammenhang zwischen  $y$  und  $\eta$ . Diesen erhält man aus Gleichung (29) nach Division durch  $\Delta$ , was auf der rechten Seite  $Y/\Delta = \eta$  ergibt. Ersetzt man gleichzeitig auf der linken Seite  $\Delta$  nach Gleichung (53), so ergibt sich wegen  $M_1 = M_\infty$

$$y \sqrt{\frac{U_\infty}{x v_\infty}} = 4,81 \left\{ \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2 \right) \eta - \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2 \int_0^\eta \sin^2 \left( \frac{\pi}{2} \eta \right) d\eta \right\}$$

und nach Ausrechnung des Integrales

$$y \sqrt{\frac{U_\infty}{x v_\infty}} = 4,81 \left\{ \eta + \frac{\gamma-1}{4} \left( \eta + \frac{\sin(\pi\eta)}{\pi} \right) M_\infty^2 \right\}. \quad (54)$$

Nach den Gleichungen (52) und (54) kann die Geschwindigkeitsverteilung in Abhängigkeit von  $y \sqrt{U_\infty/x v_\infty}$  für verschiedene Machzahlen berechnet werden. Das Ergebnis ist in Abb. 3 für  $\gamma = 1,4$  dargestellt. Zum Vergleich ist auch die exakte Lösung von Crocco (entnommen aus Howarth<sup>1)</sup>) mit eingetragen. Die Übereinstimmung ist bis zu Machzahlen von etwa 2 recht gut und auch für die größeren Machzahlen noch befriedigend. Für größere Machzahlen nimmt die Grenzschichtdicke gegenüber der inkompressiblen Strömung ( $M_\infty = 0$ ) beträchtlich zu. Die tatsächliche Grenzschichtdicke  $\delta$  der Näherungslösung erhält man aus (54) für  $y = \delta$  bei  $\eta = 1$  zu:

$$\delta \sqrt{\frac{U_\infty}{x v_\infty}} = 4,81 (1 + 0,1 M_\infty^2). \quad (55)$$

Sie ist in Abb. 4 zusammen mit der tatsächlichen Verdrängungsdicke aufgetragen, die definiert ist durch  $U_\infty \delta^* = \int_0^\infty (U_\infty - u) dy$ .

**Wandschubspannung:** Die Wandschubspannung ist

$$\tau_w = \mu_w \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_w, \quad (56)$$

wo der Index  $w$  die Werte an der Wand bedeutet.

Wegen

$$\tau_w = \mu_w \left( \frac{\partial u}{\partial Y} \right)_w \left( \frac{dY}{dy} \right)_w$$

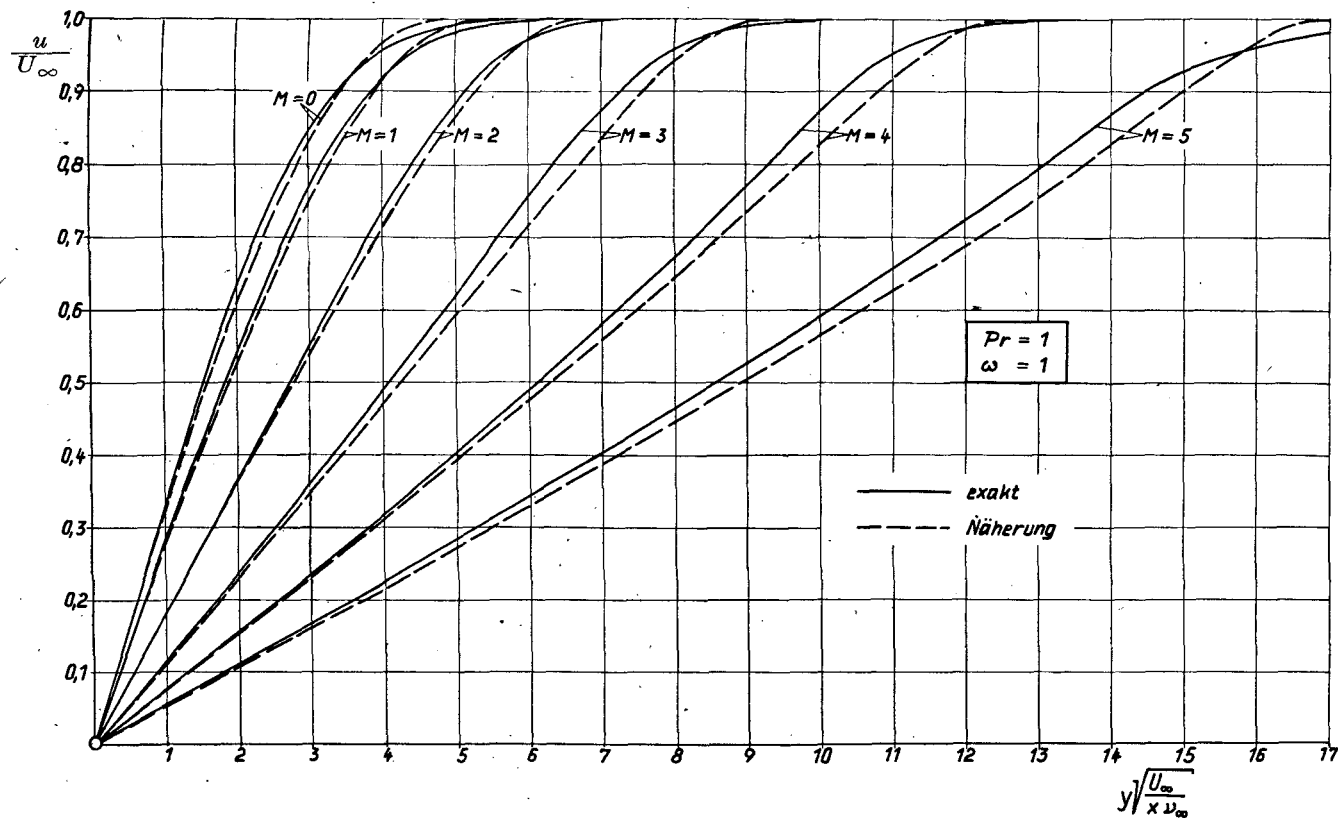


Abb. 3. Geschwindigkeitsverteilung an der längsangeströmten ebenen Platte für verschiedene Mach-Zahlen  $M_\infty$ .  
Vergleich der exakten Lösung von Crocco mit der Näherung

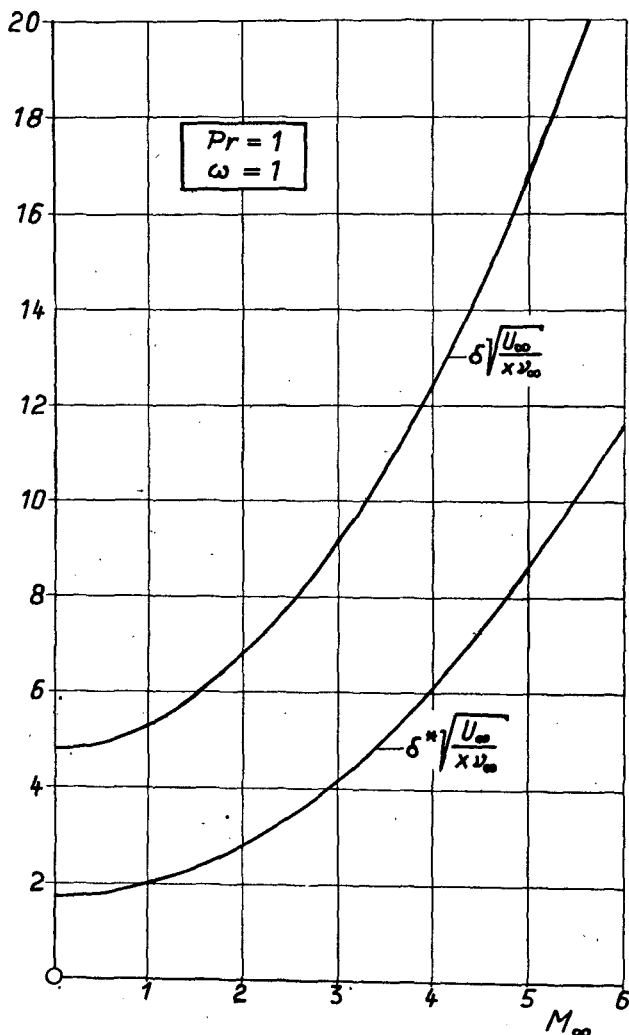


Abb. 4. Grenzschichtdicke  $\delta$  und Verdrängungsdicke  $\delta^*$  der Plattengrenzschicht in Abhängigkeit von Mach-Zahl  $M_\infty$

erhält man wegen  $(dY/dy)_w = T_\infty/T_w$  nach Gleichung (28) und wegen Gleichung (1)

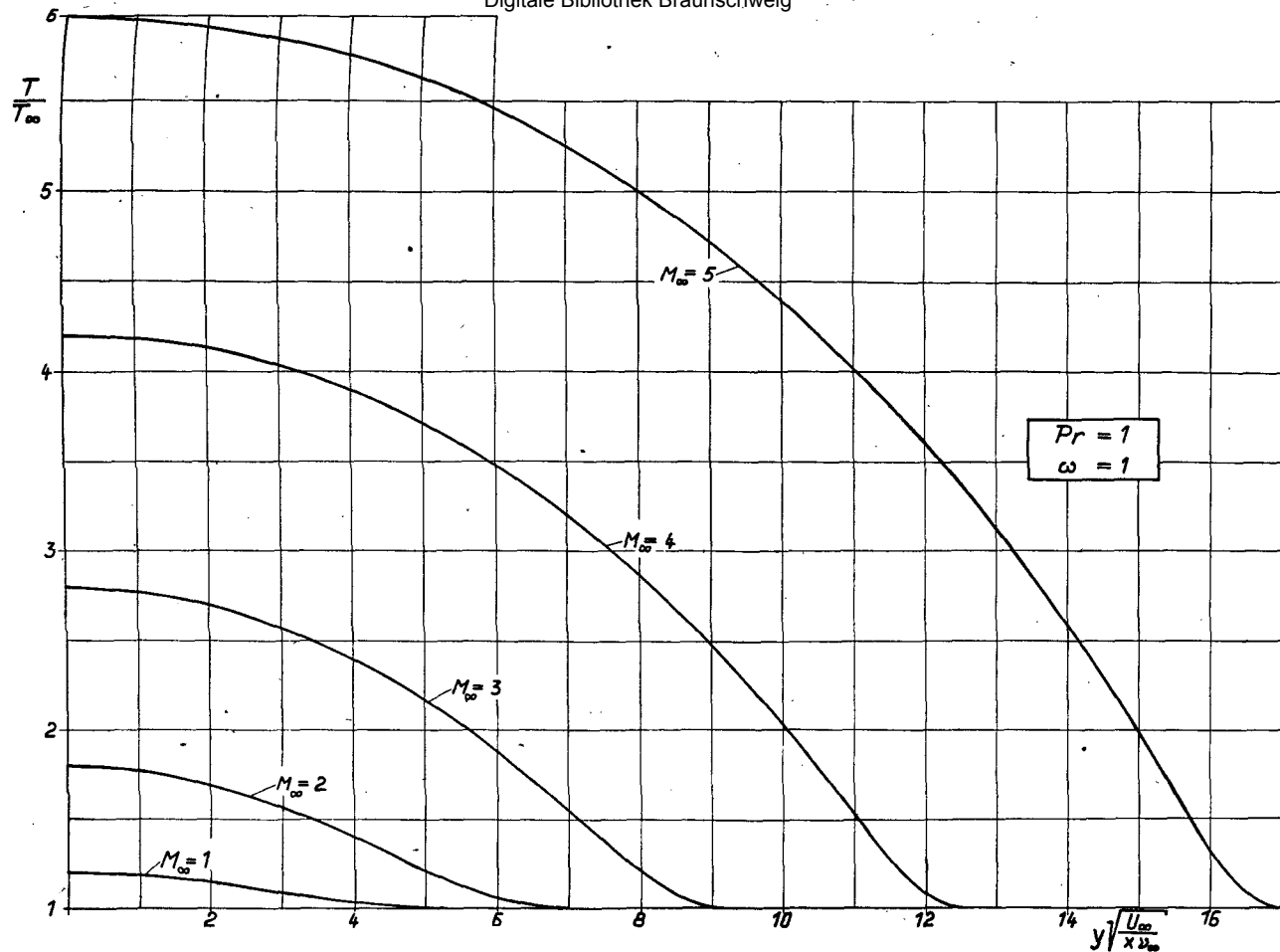
$$\tau_w = \mu_w \frac{T_\infty}{T_w} \left( \frac{\partial u}{\partial Y} \right)_w = \mu_\infty \left( \frac{\partial u}{\partial Y} \right)_w.$$

Nach Gleichungen (52), (53) und (37) ist

$$\left( \frac{\partial u}{\partial Y} \right)_w = \frac{\pi}{2} \frac{U_\infty}{A} = \frac{\pi/2}{4,81} U_\infty \sqrt{\frac{U_\infty}{x \nu_\infty}} = 0,327 U_\infty \sqrt{\frac{U_\infty}{x \nu_\infty}},$$

so daß man schließlich hat

$$\tau_w = 0,327 \mu_\infty U_\infty \sqrt{\frac{U_\infty}{x \nu_\infty}},$$

Abb. 5. Temperaturverteilung an der längsangeströmten ebenen Platte für verschiedene Mach-Zahlen  $M_{\infty}$ . (Näherung)



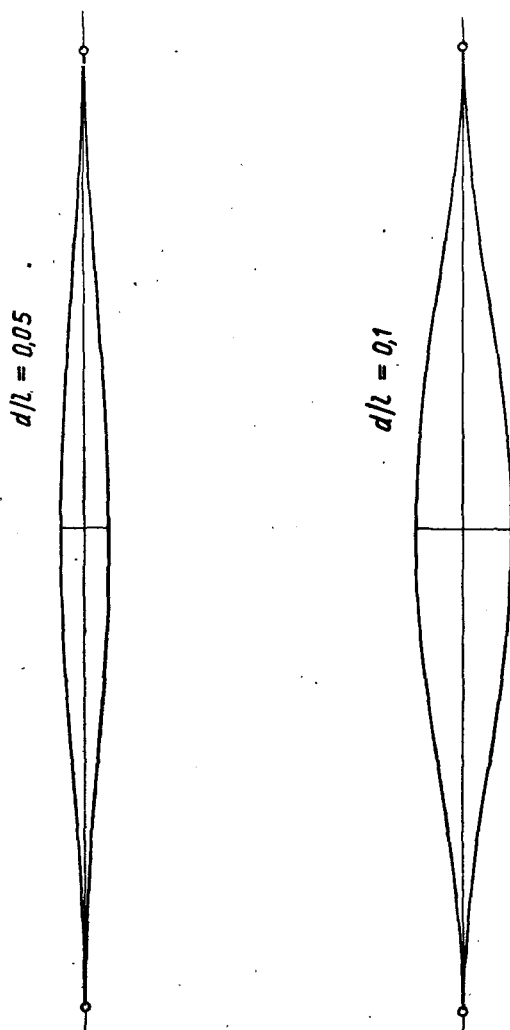


Abb. 6. „Schneiden-Profile“ der relativen Dicke  
 $d/l = 0,05$  und  $0,10$

und für den örtlichen Reibungsbeiwert

$$c_f \sqrt{\frac{U_\infty x}{\nu_\infty}} = \frac{\tau_w}{\rho_\infty U_\infty^2} \sqrt{\frac{U_\infty x}{\nu_\infty}} = 0,327. \quad (57)$$

Der örtliche Reibungsbeiwert ist also unabhängig von der Machschen Zahl. Auch stimmt der Zahlenwert nach Gleichung (57) sehr gut mit der exakten Lösung überein, welche den Zahlenwert zu 0,332 liefert.

Temperaturverteilung: Für die Temperaturverteilung erhält man aus Gleichung (9) unter Berücksichtigung von Gleichung (13)

$$\frac{T}{T_\infty} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2 \left( 1 - \frac{u^2}{U_\infty^2} \right). \quad (58)$$

Die hiernach berechneten Temperaturverteilungen sind in Abb.5 dargestellt.

### b) „Schneidenprofile“

Als weiteres Beispiel möge die Grenzschicht an einem symmetrischen Schneidenprofil bei Überschallgeschwindigkeit berechnet werden. Wir wählen ein durch die  $\cos$ -Funktion gegebenes Profil, das auch bei den Untersuchungen von J. Ginzels<sup>5)</sup> zugrunde gelegt wurde. Die Kontur des Profils sei gegeben durch

$$y(\xi) = \frac{1}{2} y_0 \{1 - \cos(2\pi\xi)\}, \quad (59)$$

wo  $\xi = x/l$  die dimensionslose Koordinate in Sehnenrichtung ( $\xi = 0$ , Vorderkante;  $\xi = 1$ , Hinterkante) bedeutet, und  $y_0$  die halbe Profildicke. Für die Dickenverhältnisse  $d/l = 2y_0/l = 0,05$  und  $0,1$  ist die Kontur in Abb.6 angegeben.

Für reine Überschallgeschwindigkeit ( $U_\infty > c_\infty$ ) erhält man für dünne Profile die Druckverteilung in bekannter Weise einfach aus

$$\Delta p = p - p_\infty = \rho_\infty U_\infty^2 \tan^2 \alpha \cdot \vartheta,$$

wo  $\alpha$  den Machschen Winkel und  $\vartheta = dy/dx$  die Neigung der Profilkontur bedeutet. Der Zusammenhang zwischen Druck und Geschwindigkeit ist durch die Bernoullische Gleichung  $U^2/2 + \int dp/\rho = \text{const}$  gegeben, die auch in der Form

$$\frac{1}{\rho_\infty} \frac{dp}{dx} = -U_\infty \frac{dU}{dx}$$

geschrieben werden kann. Damit ergibt sich als Geschwindigkeitsverteilung für symmetrische Anströmung:

$$\frac{U(x)}{U_\infty} = 1 - \pi \frac{y_0}{l} \frac{1}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \sin(2\pi\xi). \quad (60)$$

Die Geschwindigkeitsverteilungen für die Dicken  $d/l = 0,05$  und  $0,10$  bei verschiedenen Machzahlen sind in Abb.7a und 7b dargestellt. Bei Überschallgeschwindigkeit ist also längs des vorderen Viertels des Profils verzögerte Strömung, anschließend über die halbe Profillänge beschleunigte Strömung und auf dem letzten Viertel wieder verzögerte Strömung vorhanden. Da die Profilnase den Vorderkantenwinkel Null besitzt, tritt hier kein Verdichtungsstoß auf, und wenn die Anströmungsgeschwindigkeit genügend weit oberhalb der Schallgeschwindigkeit liegt (etwa  $M_\infty > 1,5$ ), ist zu erwarten, daß auch längs der ganzen Kontur kein Verdichtungsstoß eintritt. Zum Vergleich ist in Abb.7a und 7b auch die potentialtheoretische Geschwindigkeitsverteilung der inkompressiblen Strömung eingetragen, die sich analytisch berechnen läßt.

Als Ergebnis der Grenzschichtrechnung ist in Abb.8 für das Profil  $d/l = 0,05$  die „Impulsdicke“  $Z^* = \left(\frac{\theta}{l}\right)^2 \frac{U_\infty l}{\nu}$  über  $\xi = x/l$  für verschiedene Machzahlen dargestellt. Zum Vergleich ist die  $Z^*$ -Kurve der ebenen Platte nach (53a) eingetragen. Bei diesem dünnen Profil bringt die Verzögerung der Außenströmung im vorderen Viertel des Profils noch keine Ablösung zustande. Der Ablösungspunkt liegt für Überschallgeschwindigkeit bei allen Machzahlen im hinteren Viertel des Profils und wandert mit wachsender Machzahl

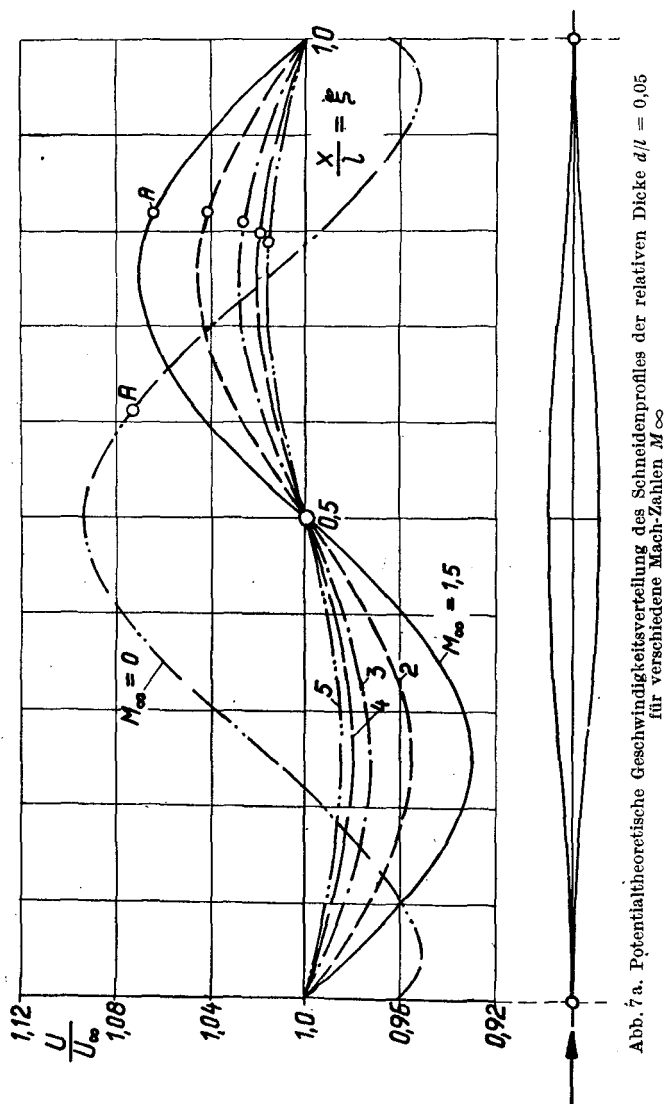
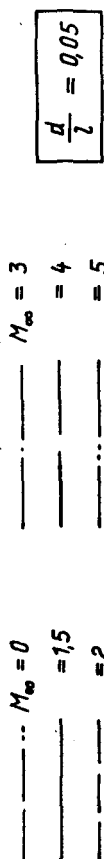
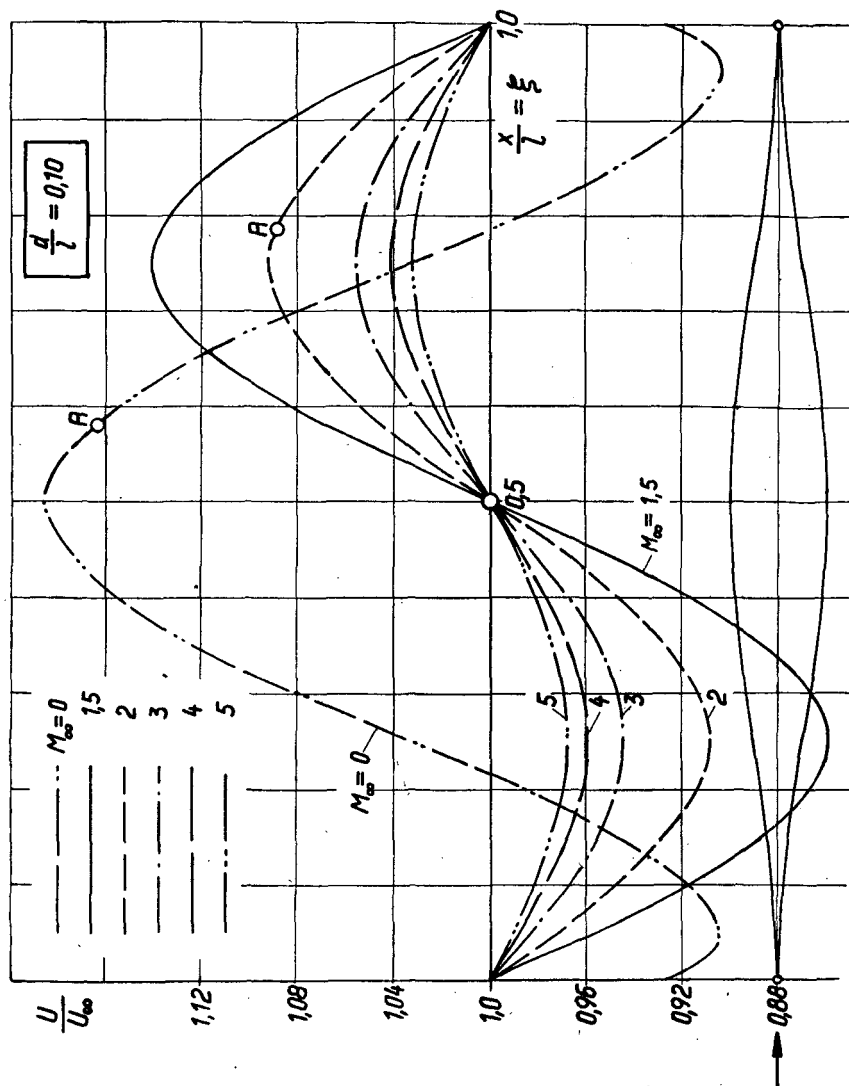


Abb. 7a. Potentialtheoretische Geschwindigkeitsverteilung des Scheidenprofils der relativen Dicke  $d/l = 0,05$  für verschiedene Mach-Zahlen  $M_\infty$

etwas nach vorn. Bei der inkompressiblen Strömung dagegen tritt laminare Ablösung schon nahe hinter der dicksten Stelle des Profils ein, wo sich das Druckminimum befindet. Die zugehörigen Kurven des Formparameters  $\kappa$  sind in Abb. 9 angegeben. Aus Bild 8 und 9 kann auch leicht der für die Wandschubspannung benötigte Verlauf der Grenzschichtdicke  $\Delta$  in der dimensionslosen Form

$$\frac{\Delta}{l} \sqrt{\frac{U_\infty l}{\nu_\infty}} = f(\xi) \quad (61)$$

ermittelt werden, da  $\frac{\Delta}{l} \sqrt{\frac{U_\infty l}{\nu}} = \sqrt{Z^*} \frac{\Delta}{\Theta}$  ist, und da  $\Delta/\Theta = \sqrt{\lambda/\kappa}$  aus  $\kappa(\xi)$

Abb 7b. Potentialtheoretische Geschwindigkeit des Schneidenprofils der relativen Dicke  $d/l = 0,10$  für verschiedene Mach-Zahlen  $M_\infty$ 

nach (44) ermittelt werden kann. Einige Ergebnisse für das Profil von der Dicke  $d/l = 0,10$  zeigt Abb.10.

Wandschubspannung: Man hat aus Gleichung (38)

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_w = \frac{U}{A} [F'_1(0) + K F'_2(0)] \left(\frac{dY}{dy}\right)_0.$$

Mit  $(dy/dY)_0 = (p_\infty/p)^{1/2} \cdot T_w/T_\infty$  nach Gleichung (28) und wegen Gleichung (1) erhält man

$$\tau_w = \mu_w \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_w = \mu_\infty \frac{U}{A} \left(\frac{p}{p_\infty}\right)^{1/2} [F'_1(0) + K F'_2(0)].$$

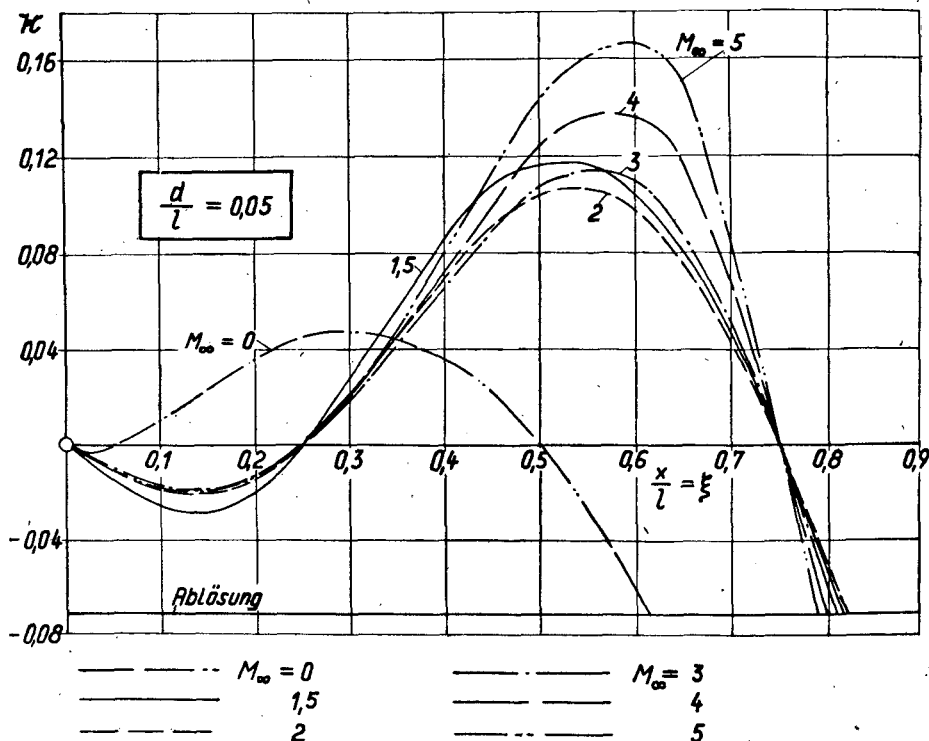


Abb. 9. Verlauf des Formparameters  $\kappa$  nach Gl. (35) für das Schneidenprofil  $d/l = 0,05$  bei verschiedenen Mach-Zahlen  $M_\infty$

und daraus für den örtlichen Reibungsbeiwert in dimensionsloser Form

$$\frac{\tau_w(\xi)}{\rho_\infty U_\infty^2} \sqrt{\frac{U_\infty l}{\nu_\infty}} = \frac{U}{U_\infty} \left( \frac{p}{p_\infty} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{F'_1(0) + K F'_2(0)}{f(\xi)} \quad (62)$$

Dabei ist  $f(\xi)$  die nach Gleichung (61) ermittelte dimensionslose Grenzschichtdicke. Die Druckverteilung  $p/p_\infty$  wird aus der potentialtheoretischen Geschwindigkeitsverteilung nach Gleichung (19) ermittelt. Damit kann nach Gleichung (62) die Verteilung des örtlichen Reibungsbeiwertes längs der Kontur ermittelt werden. Das Ergebnis für das Profil  $d/l = 0,05$  ist in Abb. 11 für die Machzahlen  $M_\infty = 1,5$  und  $5,0$  dargestellt. Mit der Machzahl ändert sich der Beiwert des Reibungswiderstandes nur wenig. Der Wert der ebenen Platte nach Gleichung (57) ist zum Vergleich eingetragen, ebenfalls der Wert für die inkompressible Strömung. ( $M_\infty = 0$ ).

Einige Geschwindigkeitsverteilungen in der Grenzschicht für das Profil  $d/l = 0,10$  bei der Machzahl  $M_\infty = 2$  sind in Abb. 12 angegeben. Die Umrechnung von der Variablen  $\eta = Y/\Delta$  auf  $y$  wurde dabei nach Gleichung (29) ausgeführt. Auch für dickere Profile ( $d/l > 0,1$ ) sind noch einige Grenzschichtrechnungen ausgeführt worden. Dabei ergibt sich, daß mit wachsender Dicke bei festgehaltener Machzahl der laminare Ablösungspunkt sehr plötzlich

$M_\infty = 0$   
 $1,5$   
 $2$   
 $3$   
 $4$   
 $5$

$$Z^* = \left(\frac{\theta}{l}\right)^2 \frac{U_\infty l}{\nu_\infty}$$

$$\frac{d}{l} = 0,05$$

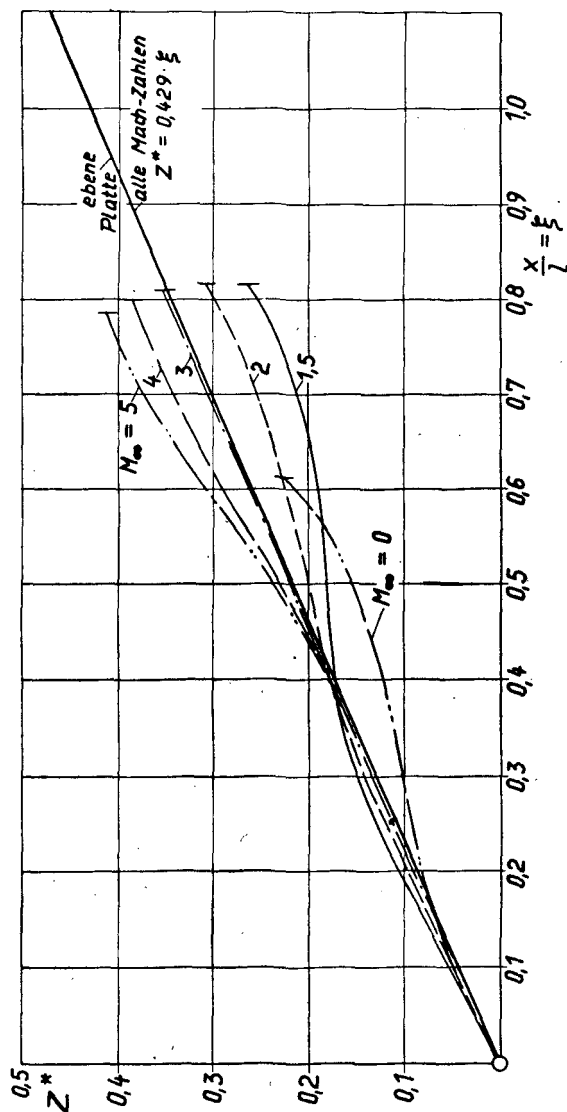


Abb. 8. Verlauf der „Impulsverlustdicke“  $Z^*$  für das Schneidenprofil  $d/l = 0,05$  für verschiedene Mach-Zahlen  $M_\infty$

nach vorn springt, da die bei den dickeren Profilen stärkere Verzögerung der Potentialströmung im ersten Viertel der Lauflänge unter Umständen die Ablösung herbeiführt. In Abb.13 ist für  $M_\infty = 2$  das plötzliche Nachvorspringen des Ablösungspunktes angegeben.

## VII. Zusammenfassung

Im Anschluß an eine Arbeit von L. Howarth<sup>1)</sup> wird für die Berechnung der laminaren Grenzschicht in kompressibler Strömung ein Näherungs-

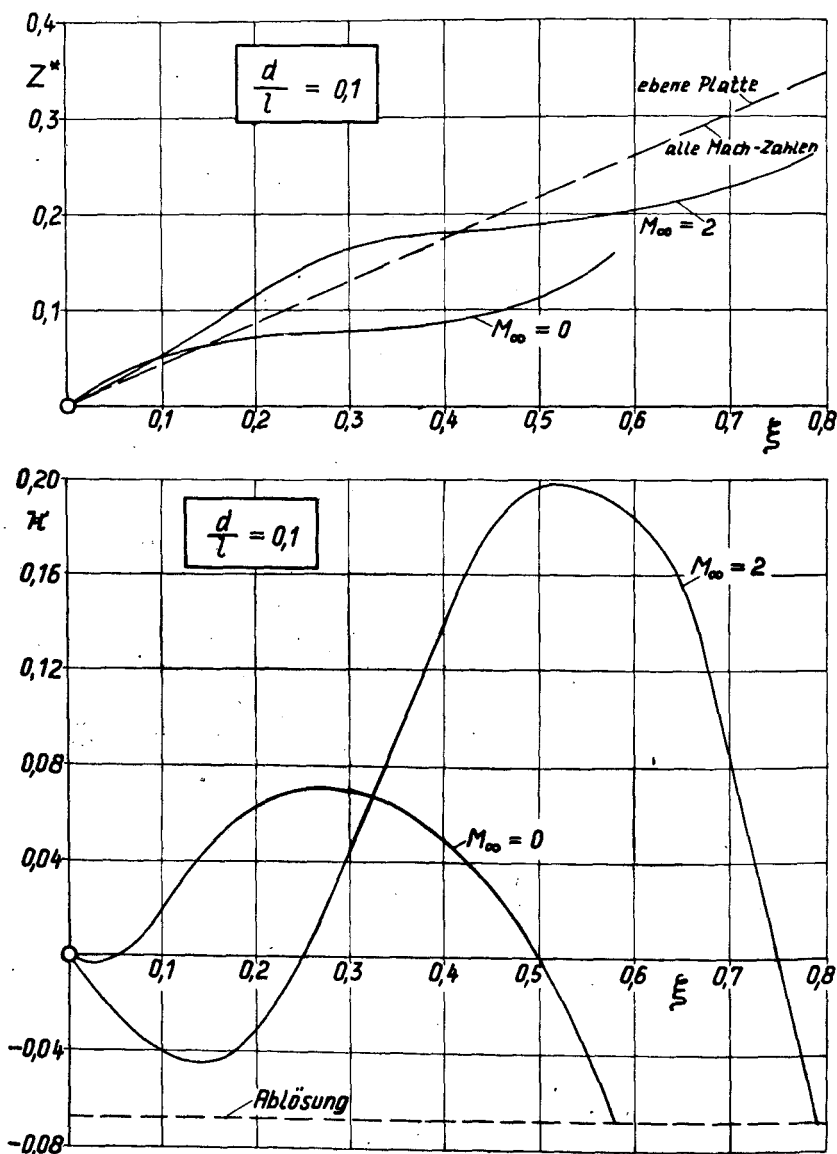


Abb. 10. Verlauf der „Impulsverlustdicke“  $Z^*$  und des Formparameters  $\eta$  für das Schneidenprofil  $d/l = 0,10$  bei verschiedenen Mach-Zahlen  $M_\infty$ .

$$Z^* = \left(\frac{\theta}{l}\right)^2 \frac{U_\infty l}{\nu_\infty}$$

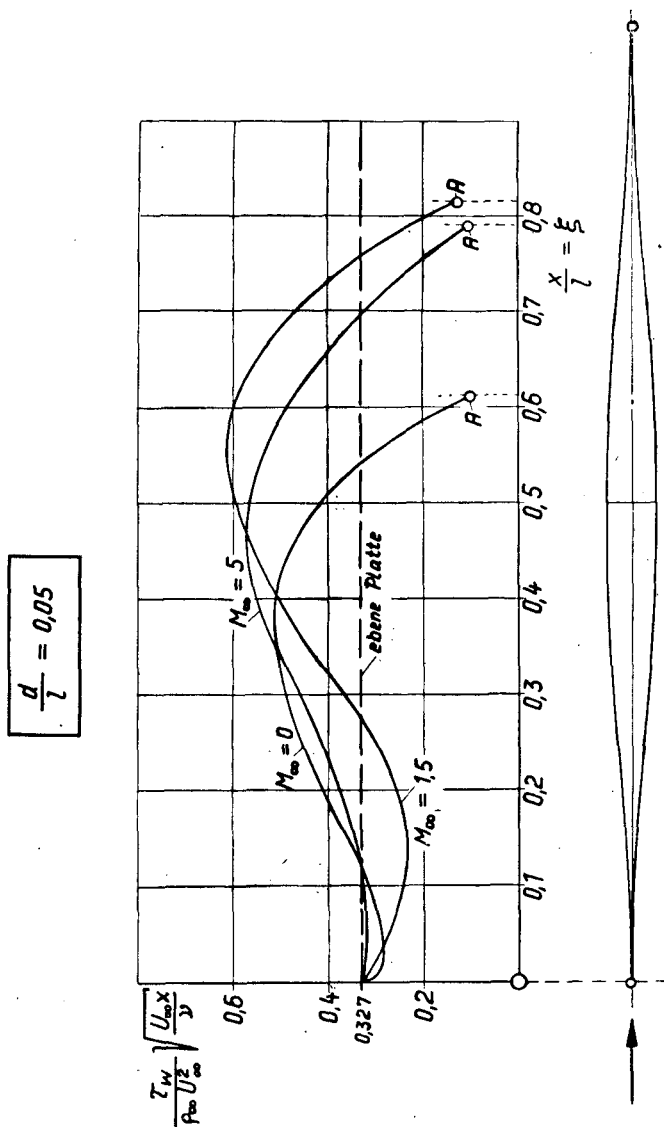


Abb. 11. Verlauf der örtlichen Wandschubspannung  $\tau_w$  für das Schneidenprofil  $d/l = 0,05$  bei verschiedenen Mach-Zahlen  $M_\infty$

verfahren nach Pohlhausen-Holstein angegeben. Das Verfahren ist anwendbar, wenn die folgenden Annahmen zugrunde gelegt werden:

1. Prandtlzahl  $Pr = 1$ .
2. Die Zähigkeit  $\mu$  ist proportional der absoluten Temperatur;  
 $\mu/\mu_\infty = T/T_\infty$ .
3. Kein Wärmeübergang an der beströmten Wand (Thermometerproblem).



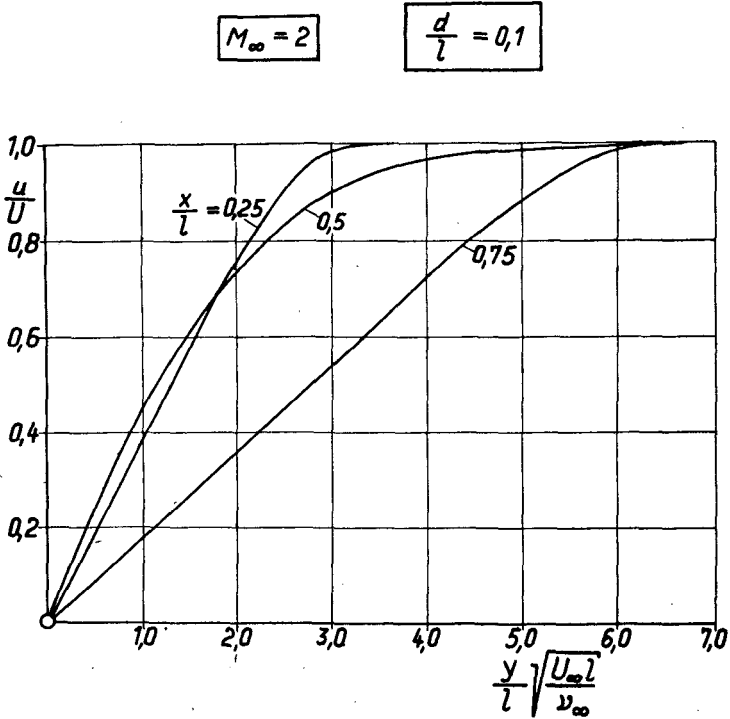


Abb. 12. Geschwindigkeitsverteilung in der Grenzschicht für das Schneidenprofil  
 $d/l = 0,1$ , Mach-Zahl  $M_\infty = 2$

Es wird ein universelles (d.h. von der speziellen Körperform unabhängiges) Diagramm angegeben, mit Hilfe dessen sich die kompressible Grenzschicht in der gleichen einfachen Weise berechnen läßt wie die inkompressible Grenzschicht.

Das Verfahren wird erprobt durch Beispielrechnungen für die längs-angeströmte ebene Platte und symmetrische „Schneidenprofile“ bei Überschallgeschwindigkeit.

#### Zusatz bei der Korrektur (Juni 1951):

Ein Berechnungsverfahren für die laminare Grenzschicht in kompressibler Strömung, das demjenigen von L. Howarth<sup>1)</sup> sehr ähnlich ist, wurde kürzlich auch von H. Weil angegeben, „Effects of pressure gradient on stability and skin friction in laminar boundary layers in compressible fluids“, Journ. Aer. Sci., **18**, 211 (1951). Die von uns in der vorstehenden Arbeit angegebene Vereinfachung des Rechenverfahrens von Howarth, die darin besteht, eine Differentialgleichung für die Impulsverlustdicke  $\Theta$  anstatt für die Grenzschichtdicke  $\Delta$  anzugeben, wurde jedoch auch in dieser Arbeit von Weil nicht ausgenutzt.

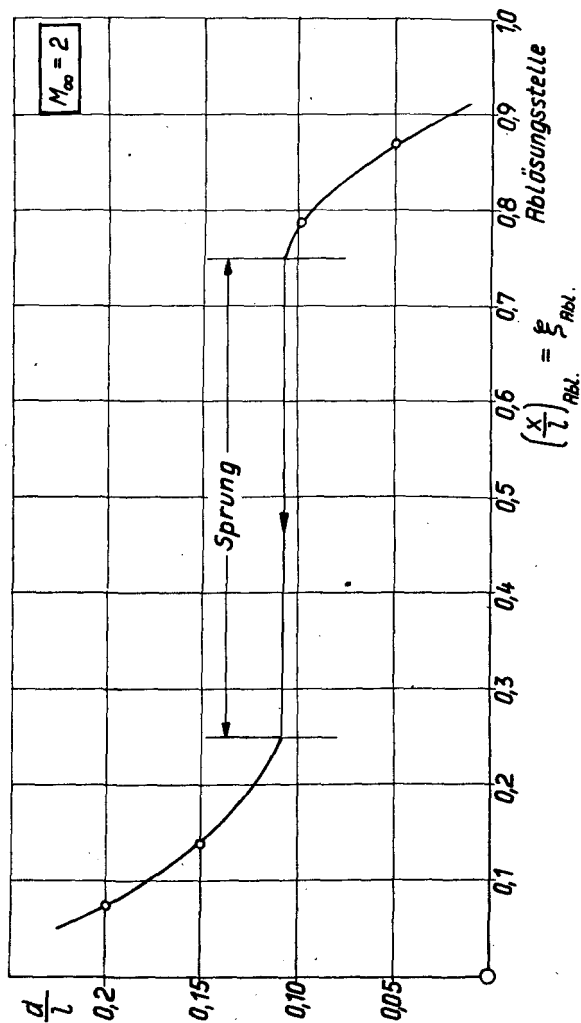


Abb. 13. Lage des Ablösungspunktes in Abhängigkeit von der Profildicke für symmetrisch angeströmte Schneidenprofile verschiedener Dicke  $d/l$ . Mach-Zahlen  $M_{\infty} = 2$

Tabelle 1: Die universelle Funktion  $F(\kappa, M_1)$ , nach Gl. (49)

$\lambda/9$	$\kappa$	$M_1 = 0$	$M_1 = 1$	$M_1 = 2$	$M_1 = 3$	$M_1 = 4$	$M_1 = 5$	$M_1 = 6$
		$F$	$F$	$F$	$F$	$F$	$F$	$F$
-0,7	-0,0711	0,9196	0,8135	0,6353	0,5088	0,4329	0,3868	0,3576
-0,6	-0,0666	0,8824	0,7823	0,6162	0,4972	0,4255	0,3828	0,3555
-0,4	-0,0520	0,7728	0,6947	0,5650	0,4716	0,4165	0,3825	0,3620
-0,2	-0,0298	0,6211	0,5766	0,5019	0,4489	0,4168	0,3974	0,3859
0	0	0,4292	0,4292	0,4292	0,4292	0,4292	0,4292	0,4292
0,2	0,0373	0,1999	0,2555	0,3492	0,4156	0,4554	0,4797	0,4945
0,4	0,0816	-0,0627	0,0608	0,2641	0,4100	0,4969	0,5495	0,5823
0,5	0,1062	-0,2019	-0,0424	0,2229	0,4129	0,5263	0,5946	0,6374
0,75	0,1742	-0,5871	-0,3258	0,1103	0,4211	0,6075	0,7195	0,7897
1,00	0,2500	-1,0000	-0,6245	0,0008	0,4467	0,7142	0,8751	0,9756
1,50	0,4172	-1,8734	-1,2459	-0,2029	0,5409	0,9874	1,2557	1,4236
2,00	0,5896	-2,7308	-1,8450	-0,3710	0,6790	1,3112	1,6902	1,9275

## Literatur

- 1) L. Howarth: Concerning the effect of compressibility on laminar boundary layers and their separation. Proc. Roy. Soc., London A, **194**, 16, (1948).
- 2) K. Stewartson: Correlated incompressible and compressible boundary layers. Proc. Roy. Soc., A, **200**, 84, (1949).
- 3) K. Pohlhausen: Zur näherungsweise Integration der Differentialgleichung der laminaren Reibungsschicht. ZAMM **1**, 235 (1921).
- 4) H. Holstein und T. Bohlen: Ein einfaches Verfahren zur Berechnung laminarer Reibungsschichten, die dem Näherungsansatz von K. Pohlhausen genügen. Lilienthal-Bericht S 10, Seite 5 (1940). Vgl. auch: H. Schlichting, Grenzschichttheorie, erscheint demnächst bei G. Braun, Karlsruhe.
- 5) I. Ginzler: Ein Pohlhausen-Verfahren zur Berechnung laminarer kompressibler Grenzschichten an einer geheizten Wand. ZAMM, **29**, 321 (1949).
- 6) Th. v. Kármán, H. S. Tsien: Boundary layer in compressible fluid. Journal of the Aeronautical Sciences, **5**, 227 (1938).
- 7) W. Hantzsche, H. Wendt: Die laminare Reibungsschicht an der ebenen Platte mit und ohne Wärmeübergang unter Berücksichtigung der Kompressibilität. Jahrbuch 1942 der Deutschen Luftfahrtforschung, S. I, 40.
- 8) H. Schlichting: Ein Näherungsverfahren zur Berechnung der laminaren Reibungsschicht mit Absaugung. Ing.-Archiv, **16**, 201 (1948).